

Chapitre 1

Rappel sur les processus aléatoires

1. Processus aléatoires à temps continu et à temps discret

Un processus aléatoire (ou processus stochastique) peut être vu comme une collection de variables aléatoires avec le temps t comme un paramètre réel. Dans ce chapitre, nous définissons une variable aléatoire (VA) comme une transformation de tous les éléments de l'espace-échantillon S en des points de l'axe des réels. Pour un processus aléatoire (PA), l'espace-échantillon est transformé en une famille de fonctions temporelles. Explicitement, nous disons qu'un processus aléatoire $X(t)$ est une transformation des éléments de l'espace-échantillon en des fonctions du temps. Comme cela est montré en Fig. 1, chaque élément de l'espace-échantillon est associé à une fonction du temps.

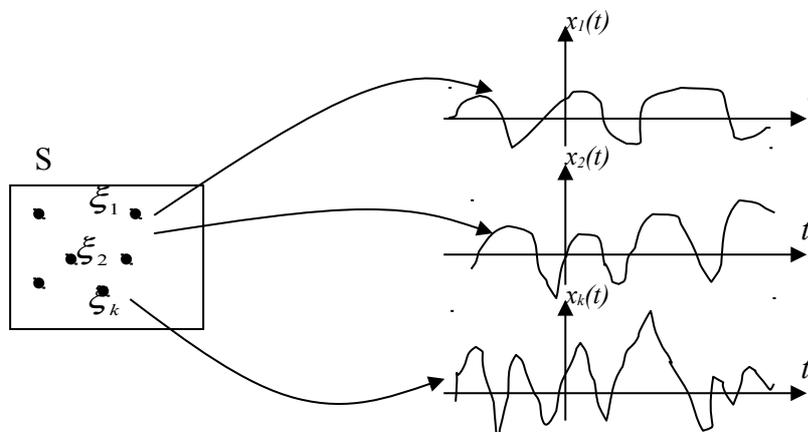


Fig. 1. Transformation de l'espace-échantillon en des fonctions-échantillon

De l'association d'une fonction du temps à chaque élément de l'espace-échantillon, résulte une famille de fonctions du temps appelée ensemble. Par conséquent, l'ensemble est une série de fonctions statistiques associée chacune à une probabilité. Il est à noter que le processus

aléatoire peut être représenté par $X(t)$ et non pas par $X(t, \xi)$ où la dépendance de ξ est omise. La fonction-échantillon est notée $x(t)$.

A ce titre, considérons un processus aléatoire $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$, où Θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ (Cf. Fig. 2).

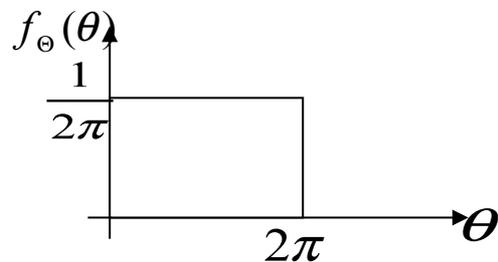


Fig. 2 Fonction de densité de probabilité de Θ

Quelques fonctions-échantillon de ce processus aléatoire sont montrées en Fig. 3. La variation des fonctions-échantillon de ce processus aléatoire particulier est due seulement à la phase. Un tel processus aléatoire dans lequel les valeurs futures sont prédites à partir de la connaissance des valeurs antérieures est dit prédictif ou déterministe. En réalité, en fixant la phase à une valeur particulière $\pi/4$, la fonction-échantillon qui correspond à un élément particulier ξ_k de l'espace des échantillons devient une fonction déterministe du temps qui est $X(t) = A \cos(\omega t + \pi/4)$.

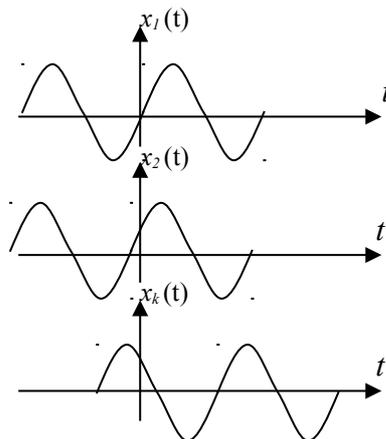


Fig. 3 Quelques fonctions-échantillon

Quand le paramètre t est fixé à l'instant t_0 , le PA $X(t)$ devient la variable aléatoire $X(t_0)$ et $x(t_0)$ une valeur-échantillon de la VA. En général, nous

sommes intéressés par quatre types de PA selon la caractéristique du temps et de la VA $X(t)=X$ à l'instant t .

(i) Etat-continu et temps-continu (continuité dans l'espace et dans le temps) : Dans ce cas, les deux quantités $X(t)$ et t ont des valeurs continues (Fig. 4).

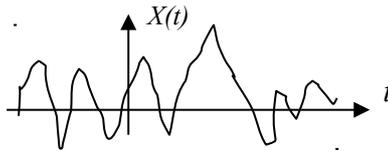


Fig. 4 Processus aléatoire continu

(ii) Etat-discret et temps-continu : Nous supposons que $X(t)$ est une séquence de valeurs discrètes tandis que t est continu (Fig. 5).

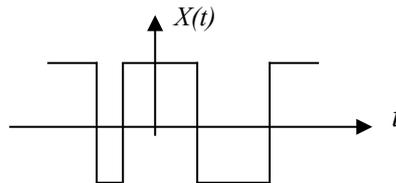


Fig. 5 Processus aléatoire discret

(iii) Etat-continu et temps-discret : Nous supposons que $X(t)$ a des valeurs continues tandis que t prend des valeurs discrètes (Fig. 6).

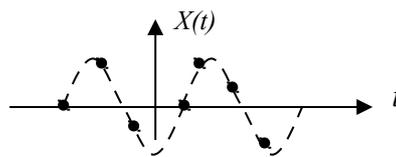


Fig. 6 Séquence aléatoire continue

(iv) Etat-discret et temps-discret : Nous supposons que $X(t)$ et t ont des valeurs discrètes (Fig. 7).

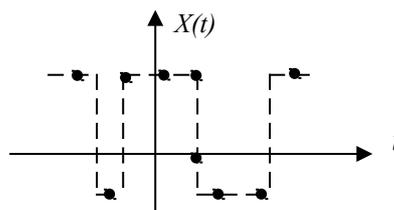


Fig. 7 Séquence aléatoire discrète

En fixant le temps t , le PA $X(t)$ devient une VA. Dans ce cas, plusieurs techniques peuvent être utilisées avec ces VA. Par conséquent, nous pouvons caractériser un PA par une distribution du premier ordre.

$$F_X(x; t) = P[X(t) \leq x] \quad (1)$$

ou par la fonction de densité de probabilité du premier ordre

$$f_X(x; t) = \frac{d}{dx} F_X(x, t) \quad (2)$$

Pour toutes les valeurs possibles de t , $f_X(x; t)$ est dite fonction de densité de probabilité (fdp) ou probability density function (pdf) et $F_X(x; t)$ est dite fonction cumulative de probabilité (fcp) ou cumulative density function (cdf).

La distribution du deuxième ordre est la distribution jointe de deux VA $X(t_1)$ et $X(t_2)$ pour chaque instant t_1 et t_2 . Ceci donne :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1 \text{ et } X(t_2) \leq x_2] \quad (3)$$

La fonction de densité de probabilité du deuxième ordre devient :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (4)$$

Normalement, la description probabiliste complète pour un PA arbitraire nécessite les spécifications des distributions de toutes les autres données, tel que :

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (5)$$

La fonction de densité de probabilité d'ordre n correspondante, devient

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (6)$$

Heureusement que nous nous intéressons toujours aux processus qui possèdent quelques régularités pour lesquelles ils peuvent être simplement décrits à travers la connaissance des fonctions de densités de probabilité d'ordre 1 et 2. Ces dernières peuvent être suffisantes pour générer les fonctions de densités de probabilités d'ordre supérieur.

2. Mesures statistiques

Dans plusieurs problèmes, seules les statistiques d'ordre 1 et 2 sont nécessaires pour caractériser un processus aléatoire. Etant donné un processus aléatoire réel $X(t)$, sa valeur moyenne est :

$$m_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x;t) dx \quad (7)$$

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{x_1, x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (8)$$

Un PA $X(t)$ de fonction d'autocorrélation $R_{xx}(t_1, t_2)$ qui dépend seulement de la différence de temps $|t_1 - t_2|$ et dont la moyenne m_x est constante, est dit stationnaire au sens large. Dans ce cas, $R_{xx}(t_1, t_2)$ est exprimée en fonction d'une seule variable $\tau = t_1 - t_2$. Pour cela, prenons $t_2 = t$ et $t_1 = t + \tau$, nous obtenons

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)X(t)] \quad (9)$$

Le PA $X(t)$ est stationnaire au sens strict si ses statistiques sont inchangeables pour tout décalage du temps par rapport à l'origine. Notons que la stationnarité d'un processus au sens strict implique sa stationnarité au sens large. Cependant, l'inverse n'est pas vrai. Autrement dit, une stationnarité au sens large est plus faible qu'une stationnarité au second ordre car, pour les processus stationnaires au sens large, seule la statistique d'ordre 2, c'est-à-dire la fonction d'autocorrélation, est concernée par la contrainte.

Deux PA $X(t)$ et $Y(t)$, sont dit conjointement stationnaires au sens large si chaque processus est stationnaire au sens large, et

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)Y(t)] \quad (10)$$

$R_{XY}(t_1, t_2)$ représente la fonction d'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$. Nous définissons aussi la fonction de d'autocovariance $C_{xx}(t_1, t_2)$ et la fonction d'intercovariance $C_{xy}(t_1, t_2)$ entre $X(t)$ et $Y(t)$ comme suit

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \quad (11)$$

et

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\} \quad (12)$$

Si $Z(t)$ est un PA complexe tel que $Z(t)=X(t)+jY(t)$, les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation de $Z(t)$ sont définies par

$$R_{ZZ}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)] \quad (13)$$

et

$$C_{ZZ}(t_1, t_2) = E\{[Z(t_1) - m_Z(t_1)][Z(t_2) - m_Z(t_2)]^*\} \quad (14)$$

où * dénote le conjugué d'un nombre complexe et $m_Z(t)$ la fonction moyenne de $Z(t)$. Les fonctions d'intercorrélation et d'intercovariance du PA complexe $Z(t)$ et un autre PA complexe $W(t)$, $W(t)=U(t)+jV(t)$ sont

$$R_{ZW}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)W^*(t_2)] \quad (15)$$

et

$$C_{ZW}(t_1, t_2) = E\{[Z(t_1) - m_Z(t_1)][W(t_2) - m_W(t_2)]^*\} \quad (16)$$

Les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation introduites précédemment sont très importantes dans la définition et la caractérisation d'un PA. Dans cette section, nous étudions quelques propriétés qui sont les plus pertinentes et ce sans donner aucune démonstration formelle.

Propriétés de la fonction d'autocorrélation

$$R_{XX}(t_2, t_1) = R_{XX}^*(t_1, t_2) \quad (17)$$

Si $X(t)$ est réel, alors la fonction d'autocorrélation est symétrique autour de la ligne $t_1=t_2$ dans le plan (t_1, t_2) , tel que :

$$R_{XX}(t_2, t_1) = R_{XX}(t_1, t_2) \quad (18)$$

La valeur de la fonction quadratique moyenne d'un PA $X(t)$ est toujours positive.

$$R_{XX}(t_1, t_1) = E[X(t_1)X^*(t_1)] = E[|X(t_1)|^2] \geq 0 \quad (19)$$

Si $X(t)$ est réel, la valeur quadratique moyenne $E[X(t)^2]$ est toujours positive

$$|R_{XX}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_{XX}(t_1, t_1)R_{XX}(t_2, t_2)} \quad (20)$$

L'équation (20) est connue sous le nom de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et peut s'écrire

$$|R_{XX}(t_1, t_2)|^2 \leq E[|X(t_1)|^2]E[|X(t_2)|^2] \quad (21)$$

L'autocorrélation est une fonction définie positive pour un ensemble de constantes a_1, a_2, \dots, a_n et un ensemble de temps t_1, t_2, \dots, t_n .

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i a_j^* R_{XX}(t_i, t_j) > 0 \quad (22)$$

Propriétés de la fonction d'intercorrélacion

Considérons deux PA $X(t)$ et $Y(t)$, alors

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}^*(t_2, t_1) \quad (23)$$

Si les PA $X(t)$ et $Y(t)$ sont réels

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_2, t_1) \quad (24)$$

En général, $R_{XY}(t_1, t_2)$ et $R_{YX}(t_2, t_1)$ ne sont pas égales

$$|R_{XY}(t_1, t_2)| = |E[X(t_1)]E[Y(t_2)]| \leq \sqrt{R_{XX}(t_1, t_1)R_{YY}(t_2, t_2)} = \sqrt{E[|X(t_1)|^2]E[|Y(t_2)|^2]} \quad (25)$$

3. Stationnarité au sens large

Maintenant, nous supposons que les PA $X(t)$ et $Y(t)$ sont réels et stationnaires au sens large. La fonction d'autocorrélation est alors une fonction paire de τ , tel que

$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau) \quad (26)$$

$$R_{XX}(0) = E[|X(t)|^2] \quad (27)$$

et

$$R_{XX}(0) = E[X^2(t)] = \sigma_X^2 + m_X^2 \geq 0 \quad (28)$$

La fonction d'autocorrélation à $\tau = 0$ est constante et égale à la valeur quadratique moyenne

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \quad (29)$$

La valeur maximale de la fonction d'autocorrélation à $\tau = 0$ est positive comme cela est montré en Fig. 8.

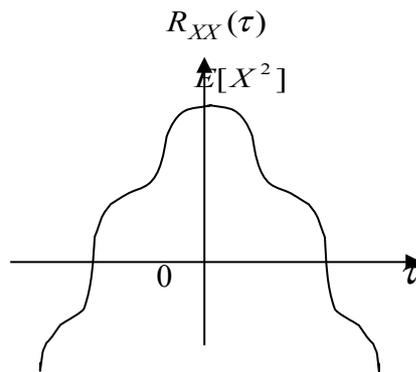


Fig. 8 Fonction d'autocorrélation possible

Si $X(t)$ a une composante dc (valeur moyenne non nulle), alors $R_{XX}(\tau)$ a une composante constante. Ceci provient du fait que deux observations d'un PA stationnaire au sens large deviennent décorrélatées quand $\tau \rightarrow \infty$. Dans ce cas, la fonction de covariance tend vers zéro.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{XX}(\tau) &= E\{[X(t+\tau) - m_X][X(t) - m_X]\} \\ &= R_{XX}(\tau) - m_X^2 \end{aligned} \quad (30)$$

ou

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = |m_X|^2 \quad (31)$$

Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires au sens large, des propriétés similaires peuvent être obtenues

$$R_{XY}^*(-\tau) = R_{YX}(\tau) \quad (32)$$

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0)R_{YY}(0) \quad (33)$$

$$R_{XY}(0) = R_{YX}^*(0) \quad (34)$$

Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont des processus aléatoires réels, alors

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{R_{XX}(0) + R_{YY}(0)}{2} \quad (35)$$

Exemple 1 : Considérons le processus aléatoire $X(t)$ défini par $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$ où A et ω_0 sont des constantes et Θ une variable aléatoire de fonction de densité de probabilité (fdp)

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}, & |\theta| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- a) Trouver la moyenne $E[X(t)]$ et la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(t_1, t_2)$?
- b) Ce processus est-il stationnaire au sens large ?

Réponses :

- a) Calcul de $E[X(t)]$ et de $R_{XX}(t_1, t_2)$

$$E[X(t)] = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} X(t) f_{\theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} A \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{4}{\pi} d\theta$$

$$= \frac{4A}{\pi} [\sin(\omega_0 t + \pi/8) - \sin(\omega_0 t - \pi/8)]$$

Comme $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

alors

$$E[X(t)] = \frac{8A}{\pi} \cos(\omega_0 t) \sin(\pi/8)$$

$$R_{XX}(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)X(t)]$$

$$= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} A^2 \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{4}{\pi} d\theta$$

Comme $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

alors

$$R_{XX}(t + \tau, t) = \frac{2A^2}{\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) + \cos(\omega_0 \tau)] d\theta$$

$$= \frac{2A^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) \Big|_{-\pi/8}^{\pi/8} + \frac{\pi}{4} \cos(\omega_0 \tau) \right]$$

En appliquant la transformation ci-dessus, nous obtenons

$$R_{XX}(t + \tau, t) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{2A^2}{\pi} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \sin(\pi/4)$$

b) Le processus aléatoire $X(t)$ est non stationnaire au sens large car $E[X(t)]$ et $R_{XX}(t + \tau, t)$ dépendent du temps t .

4. Processus Gaussien

Le processus aléatoire $X(t)$ est Gaussien si les VA $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement Gaussiennes pour toutes les valeurs possibles de n et de t_1, t_2, \dots, t_n . Sachant que la VA Gaussienne multivariée dépend seulement du vecteur moyen et de la matrice de covariance, nous observons que si $X(t)$ est stationnaire au sens large, il l'est aussi au sens strict. Si $X(t)$ est un PA Gaussien appliqué au système linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$, alors le processus de sortie est aussi Gaussien

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (36)$$

Exemple 2 : Sachant que le processus Gaussien $X(t)$ de moyenne nulle est stationnaire au sens large, représente l'entrée d'un système de détection quadratique (un système non-linéaire sans mémoire).

a) Vérifier que la sortie $Y(t)$ est non-Gaussienne ?

b) Déterminer la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(\tau)$ et la variance σ_Y^2 ?

-

Réponses :

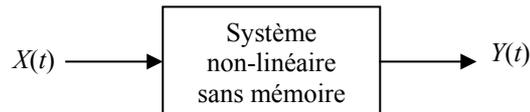


Fig. 9 Réponse impulsionnelle $h(t)$

a) La fdp de $X(t)$ est une loi Gaussienne donnée par

$$f_X(x;t) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

La densité de la sortie $Y(t) = X^2(t)$ devient [1, Exemple 1.19, page 51]

$$f_Y(y;t) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y/2\sigma^2} ; y \geq 0$$

où $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$ avec $y = g(x) = x^2$ et $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$

Nous remarquons que la sortie du système non linéaire a une fonction densité non-Gaussienne.

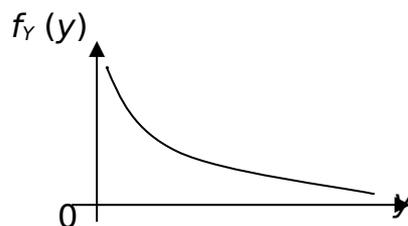


Fig. 10 Fonction de densité de probabilité de la sortie

b) L'autocorrélation de la sortie $Y(t) = X^2(t)$ est calculée comme suit

$$R_{YY}(t+\tau, t) = E[Y(t+\tau)Y(t)] = E[X^2(t+\tau)X^2(t)] = E[X(t+\tau)X(t+\tau)X(t)X(t)]$$

Nous utilisons le résultat suivant avec X_1, X_2, X_3 et X_4 des VA jointement Gaussiennes de valeur moyenne nulle [1, équation (2.244), page 129].

$$E[X_1 X_2 X_3 X_4] = E[X_1 X_2]E[X_3 X_4] + E[X_2 X_3]E[X_1 X_4] + E[X_1 X_3]E[X_2 X_4]$$

Alors,

$$R_{YY}(t + \tau, t) = R_{YY}(\tau) = E[X^2(t + \tau)]E[X^2(t)] + 2\{E[X(t + \tau)X(t)]\}^2 = R_{XX}^2(0) + 2R_{XX}^2(\tau)$$

La valeur quadratique moyenne de $Y(t)$ devient

$$E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) = 3\{E[X^2(t)]\}^2 = 3[R_{XX}(0)]^2$$

Mais aussi,

$$E[Y(t)] = E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \sigma_X^2$$

Alors, la variance de $Y(t)$ est $\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] - \{E[Y(t)]\}^2 = 2[R_{XX}(0)]^2 = 2\sigma_X^4$

5. Densité spectrale de puissance

Etant donné un signal déterministe $s(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est donnée par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (37)$$

$S(f)$ existe si l'intégrale converge. Quelques fois, la fonction $S(f)$ est appelée le spectre de $s(t)$. En allant du domaine temporel $s(t)$ vers le domaine fréquentiel $S(f)$, aucune information sur le signal n'est perdue. C'est-à-dire, $S(f)$ donne une description complète de $s(t)$ et vice-versa. Par conséquent, le signal $s(t)$ peut être obtenu à partir de $S(f)$ en prenant simplement la transformée de Fourier inverse (TFI)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad (38)$$

En ce qui concerne les PA, nous supposons que l'ensemble existe en tout temps. En général, les fonctions-échantillon ne sont pas complètement intégrables. Cependant, comme nous nous intéressons à la notion de spectre, nous suivrons le même raisonnement que celui des signaux déterministes à énergie finie. Soit donc $x_T(t)$ une fonction tronquée entre $-T$ et T de la fonction-échantillon $x(t)$ du PA $X(t)$, tel que :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (39)$$

La TF tronquée du processus $X(t)$ est :

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (40)$$

La puissance moyenne de $x_T(t)$ est définie par :

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (41)$$

En utilisant le théorème de Parseval, énoncé par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df \quad (42)$$

la puissance moyenne de $x_T(t)$ devient alors :

$$P_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T} df \quad (43)$$

où le terme $|X_T(f)|^2 / 2T$ est la densité spectrale de puissance (DSP) de $x_T(t)$. La moyenne totale de P_T est donnée par :

$$E[P_T] = \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] df \quad (44)$$

La DSP du processus aléatoire $X(t)$ est définie par :

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] \quad (45)$$

Si $X(t)$ est stationnaire au sens large, la DSP $S_{XX}(f)$ peut être exprimée comme la TF de la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$ qui est :

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (46)$$

La relation inverse correspondante utilisant la TFI est :

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) e^{j2\pi f \tau} df \quad (47)$$

Les relations (46) et (47) sont souvent appelées relations de Wiener-Khintchine. A partir de la définition, nous pouvons noter que la DSP est réelle, positive et est une fonction paire de f .

Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus conjointement stationnaires au sens large. Leurs fonctions de densité inter-spectrales sont définies par :

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (48)$$

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (49)$$

A partir de $R_{YX}(\tau) = R_{XY}^*(\tau)$, nous pouvons écrire $S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f)$.

Exemple 3: Soit le processus stochastique $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$ où

$f_\Theta(\theta) = 1/2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et A et ω_0 sont des constantes. Déterminer la DSP de ce processus?

Réponses :

Calcul de la DSP ?

$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, A et ω_0 sont des constantes et Θ est une VA uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

$X(t)$ est stationnaire au sens large car :

$$\begin{cases} E[X(t)] = 0 \\ R_{XX}(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{cases}$$

Alors, nous pouvons calculer sa densité spectrale de puissance par la transformée de Fourier de $R_{XX}(t+\tau, t)$. D'où,

$$\begin{aligned} S_{XX}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}) d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

$\delta(\cdot)$ est l'impulsion de Dirac.

6. Ergodicité

Un processus ergodique est un [PA](#) pour lequel toutes les [statistiques](#) peuvent être approchées par l'étude d'une seule [réalisation](#) suffisamment longue. Autrement dit, l'ergodicité assure que les moyennes temporelles soient identiques aux moyennes d'ensembles (moyennes statistiques). Habituellement, nous ne sommes pas intéressés par l'estimation de toutes les moyennes d'ensembles d'un PA mais beaucoup plus par une ergodicité plus faible telles que celles sur la moyenne et sur l'autocorrélation.

6.1 Ergodicité sur la moyenne ou au premier ordre

Un PA stationnaire $X(t)$ est ergodique sur la moyenne si la moyenne temporelle de la fonction échantillon $x(t)$ est égale à sa moyenne d'ensemble. C'est à dire,

$$E[X(t)] = \langle x(t) \rangle \quad (50)$$

où le symbole $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne temporelle, et $E[X(t)]$ et $\langle x(t) \rangle$ sont définies par :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx \quad (51)$$

et

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

(52)

6.2 Ergodicity sur l'Autocorrélation ou au second ordre

Le PA stationnaire $X(t)$ est ergodique sur l'autocorrélation si :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)] = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle \quad (53)$$

$\langle x(t+\tau)x(t) \rangle$ désigne la moyenne temporelle de la fonction d'autocorrélation de la fonction échantillon $x(t)$, définie par :

$$\langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (54)$$

La condition nécessaire et suffisante de l'ergodicité sur l'autocorrélation est tel que les variables $X(t+\tau)X(t)$ et $X(t+\tau+\alpha)X(t+\alpha)$ deviennent décorréelées pour chaque τ quand α tend vers l'infini.

Exemple 3: Soit le processus stochastique $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$ où $f_\Theta(\theta) = 1/2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et A et ω_0 sont des constantes. Montrer que $X(t)$ est ergodique sur la moyenne et sur l'autocorrélation?

Réponse:

Nous avons montré dans l'exemple 3 que la moyenne et l'autocorrélation de $X(t)$ sont $E[X(t)] = 0$ et $R_{xx}(\tau) = (A^2 / 2) \cos(2\pi f_c \tau)$. Soit donc $x(t)$ la fonction échantillon du PA $X(t)$, définie par :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

La moyenne temporelle de la moyenne et la moyenne temporelle de l'autocorrélation sont alors :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_c t + \theta) dt = 0$$

et

$$\begin{aligned} \langle x(t+\tau)x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \cos[2\pi f_c(t+\tau) + \theta] \cos(2\pi f_c t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

Par conséquent, le PA $X(t)$ est ergodique sur la moyenne et sur l'autocorrélation.

7. Signaux Statistiques (Aléatoires)

Un signal aléatoire est un signal qui ne se répète pas à l'identique lorsque nous réitérons l'expérience qui l'a produit. De la même manière qu'une variable aléatoire, un signal statistique est un ensemble de valeurs caractérisé par une loi de probabilité. Quelques exemples de signaux statistiques peuvent produire:

(i) Un bruit blanc : Séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (IID)

(ii) Une sinusoïde avec une phase aléatoire : $X(t) = A \sin(2\pi f t + \Phi)$

(iii) Une sinusoïde avec une amplitude aléatoire : $X(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$

(iv) Un bruit de grenaille (Shot noise) : $X(t) = \sum_i A_i \delta(t - \tau_i)$

Les descripteurs suivants caractérisent le comportement d'un signal à un instant t .

- ✓ Espérance mathématique (moyenne d'ensemble $m_X(t) = E\{X(t)\}$),
Indicateur de position moyenne du signal à l'instant t .

- ✓ Puissance instantanée (moyenne quadratique $P_X(t) = E\{|X(t)|^2\}$). Mesure de la puissance moyenne du signal à l'instant t .
- ✓ Variance (dispersion $Var_X(t) = E\{|X(t) - m_X|^2\}$). Mesure des fluctuations aléatoires autour de la moyenne.
- ✓ Ecart type ($\sigma_X(t) = \sqrt{Var_X(t)}$). Comme la variance, mais exprimé dans les mêmes unités que le signal.

Nous classons deux sortes de signaux statistiques. Les signaux synthétiques et les signaux réels.

Remarque : Notons que l'hypothèse d'ergodicité en traitement du signal consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Ainsi, si un signal est ergodique alors il est stationnaire, mais l'inverse n'est pas vrai.

7. 1 Signaux aléatoires synthétiques

Les signaux aléatoires synthétiques ou simulés représentent un modèle de simulation pour la réalisation et le développement des techniques de traitement du signal telles que la modélisation, l'estimation et la détection des signaux radar. La simulation à l'aide d'un ordinateur des variables aléatoires, aussi complexes soient-elles, repose sur la simulation de variables aléatoires indépendantes très simples, auxquelles sont appliquées des transformations adéquates. La variable aléatoire de base est celle de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Les algorithmes de génération sont généralement basés sur des variables aléatoires de cette loi uniforme. Pour la simulation de variables aléatoires unidimensionnelles, nous pouvons envisager les deux approches suivantes.

(i) Méthode de l'inversion de la fonction de répartition

Une première approche repose sur la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Cette méthode fut proposée par Von Neumann en 1947. Dans toute la suite, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit X une variable aléatoire réelle de cdf $F_X(x) = P[X(t) \leq x]$, dont l'inverse généralisé (appelé quantile) est défini par :

$$X = F^{-1}(U)$$

Exemple 5 :

Donner l'algorithme de la génération des variables aléatoires simulées de la distribution exponentielle de pdf $f_x(x) = \frac{1}{b} \exp(-x/b)$ pour tout $x \geq 0$.

Réponse :

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{b} \exp(-x/b) dx = 1 - \exp(-x/b) = u([0, 1])$$

$$u = 1 - \exp(-x/b)$$

$$X = F^{-1}(U) = -b \log(1 - U)$$

où U est une variable aléatoire de distribution uniforme ($u = \text{rand}$) qui est disponible dans tous les logiciels de traitement et d'analyse (Fortran, Turbo-Pascal, C++, Matlab, ...).

(ii) Méthode de la variable Gaussienne

Il est aussi possible de générer une variable aléatoire Gaussienne directement, sans approximation, à l'aide de la transformation de Box-Muller. Pour la simulation des lois conditionnelles, la méthode de rejet peut être appliquée.

7. 2 Signaux aléatoires réels

La modélisation statistique des signaux radar ne peut sérieusement s'envisager que sur des données réelles prétraitées. Dans la littérature, il existe plusieurs bases de données réelles. A titre d'exemple, le radar McMaster IPIX est un radar expérimental de recherche à fort pouvoir de résolution et à quatre polarisations (HH, HV, VH et VV), situé à l'Est de "la place polonaise", Grimsby, Ontario-Canada. Il a été à l'origine développé en 1984 pour la détection d'icebergs. L'acronyme IPIX constituait alors l'abréviation de "Ice multiParameter Imaging X-Band" Radar. Après les progrès réalisés entre 1993 et 1998, les données haute résolution collectées par le radar IPIX sont devenues une référence (benchmark) pour

examiner les algorithmes intelligents de détection. Par conséquent, la signification de l'acronyme a été changée à "*Intelligent Pixel processing X-band*" Radar. Le radar IPIX est positionné à une hauteur de 20m au-dessus du niveau du lac d'Ontario et éclaire la zone avec un angle d'incidence faible (low grazing angle). Le radar IPIX émet en bande de fréquence X (8-12 GHz) et fonctionne avec une fréquence de répétition d'impulsion de 1 KHz. La largeur du faisceau d'antenne est de 0.9°, le nombre de cases distance (ou de cellule de résolution) est 34 et le nombre d'impulsions par case distance est 60 000. De plus, la base de données IPIX (Sea clutter data base) est composée de plusieurs fichiers de différentes résolutions en distance (3m, 15m et 30m) pouvant être utilisés pour effectuer une analyse expérimentale.

Pour cela, considérons, à titre d'exemple, le cas d'un détecteur d'enveloppe. Dans ce cas, l'amplitude du clutter X est calculée à partir de deux composantes en-phase I et en-quadrature Q des données brutes, i.e., à partir de données complexes du clutter reçu: $X = \sqrt{I^2 + Q^2}$. Par la suite, une normalisation de la puissance des signaux résultants est également effectuée de sorte que le second moment soit égal à l'unité ($E[X^2] = 1$). Une fois tout cela réalisé, nous pouvons donc effectuer une analyse expérimentale de la modélisation des données réelles.

Références

- [1] Mourad Barkat, '*Signal Detection and Estimation*', Second edition 2005, Artech house, Boston, USA.
- [2] Frédéric De Coulon, '*Théorie et Traitement des Signaux*', Dunod 1985, Paris, France.